УДК 531.539.3.62.752(031)

Е.М. ИВАНОВ, к.т.н., доц. каф. инженерной графики ХНАДУ "ХАДИ"

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕМПФИРУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВЕНЬЕВ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Запропоновано метод оцінки демпфіруючих характеристик ланок коливальних систем з n-ступенями вільності (КС$_n$), а саме як множина коливальних ланок, поєднаних між собою. Розглянуто питання метода визначення коефіцієнтів дісіпації усіх ланок, які належать цієї системі.

The method of estimation of absorbing characteristics of the oscillatory systems links with n-stages of freedom (КС$_n$), namely as a number of interconnected oscillatory links has been offered. The problem of dissipation coefficients determination method of all links of the system has been investigated.

При проектировании машин и механизмов, включающих в себя колебательные системы с n-степенями свободы (КС$_n$), то есть множество колебательных звеньев, соединенных между собой, кроме определения масс и коэффициентов жесткости важным является правильный расчет демпфирующих (диссипативных) характеристик звеньев. Причем в некоторых случаях создаются специальные демпфирующие устройства. Если величины масс и коэффициентов жесткости колебательной системы (КС) определяются с учетом конструкции и механизма, то коэффициенты диссипации так определить, особенно экспериментально, затруднительно. Для четкого уяснения вопроса о диссипации в КС$_n$ является рациональным создание метода оценки коэффициентов диссипации всех звеньев, входящих в эту систему. Таким методом может быть предлагаемый в данном изложении теоретико-экспериментальный метод.

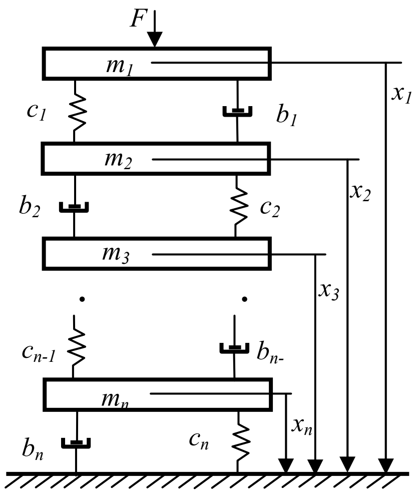

Рисунок 1

Рассмотрим этот метод более подробно.

Пусть КС$_n$ является линейной и ее механическая схема изображена на рисунке 1, где $m_1 \div m_n$; $c_1 \div c_n$; $b_1 \div b_n$ – величины масс, коэффициентов жесткости и диссипации соответственно; $x_1 \div x_n$ – перемещения масс; F – вынуждающая сила.

Для решения поставленной задачи запишем уравнения движения всех масс в KC_n в виде

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 = F + b_1 \frac{dx_2}{dt} + c_1 x_2$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left(b_1 + b_2\right) \frac{dx_2}{dt} + \left(c_1 + c_2\right) x_2 = b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_2 \frac{dx_3}{dt} + c_1 x_1 + c_2 x_3$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \left(b_2 + b_3\right) \frac{dx_3}{dt} + \left(c_2 + c_3\right) x_3 = b_2 \frac{dx_2}{dt} + b_3 \frac{dx_4}{dt} + c_2 x_2 + c_3 x_4$$

....

$$m_{(n-1)} \frac{d^2 x_{(n-1)}}{dt^2} + \left[b_{(n-2)} + b_{(n-1)}\right] \frac{dx_{(n-1)}}{dt} + \left[c_{(n-2)} + c_{(n-1)}\right] x_{(n-1)} =$$

$$= b_{(n-2)} \frac{dx_{(n-2)}}{dt} + b_{(n-1)} \frac{dx_n}{dt} + c_{(n-2)} x_{(n-2)} + c_{(n-1)} x_n$$

....

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + \left(b_{(n-1)} + b_n\right) \frac{dx_n}{dt} + \left(c_{(n-2)} + c_n\right) x_n = \qquad (1)$$

$$= b_{(n-1)} \frac{dx_{(n-1)}}{dt} + + c_{(n-1)} x_{(n-1)}$$

Как видно из (1) каждое уравнение в этой системе можно представить как уравнение движения $KC_l, l = \overline{1,n}$ с одной степенью свободы при условии, что правые части этого уравнения описывают вынуждающую силу этой $KC_l, l = \overline{1,n}$.

Примем, что $F = F_a \cos \omega t$, где F_a – амплитуда; ω – круговая частота; t – время. В этом случае перемещения $x_l, l = \overline{1,n}$ запишутся в виде $x_l(t) = x_{la} \cos(\omega t - \varphi_l)$, , $l = \overline{1,n}$ где x_{la} – амплитуда; φ_l – угол сдвига между x_l и l-й вынуждающей силой.

При гармоническом внешнем воздействии F массы $m_l, l = \overline{1,n}$ колеблются с частотой этой силы. Амплитуды $x_{la}, l = \overline{1,n}$ тогда можно определить соотношением [2]

$$\underset{l=\overline{1,n}}{x_{la}} = \frac{F_{al}}{m_l \sqrt{\left(\omega_{0l}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b_l}{m_l} \omega\right)^2}}, \qquad (2)$$

где F_{al} – амплитуда l-й вынуждающей силы; ω_{0l} – собственная частота l-й KC. Если всмотреться в схему, изображенную на рисунке 1, то видно, что KC_n представляет собой совокупность KC с двумя степенями свободы и собственные частоты $\omega_{0l}, l=\overline{1,n}$ могут определяться выражениями [1]

$$\omega_{0(l-1)}=\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{c_{(l-1)}+c_l}{m_{(l-1)}}+\frac{c_l}{m_l}\right]+\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{c_{(l-1)}+c_l}{m_{(l-1)}}+\frac{c_l}{m_l}\right]^2-\frac{c_{(l-1)}c_l}{m_{(l-1)}m_l}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (3)$$

$$\omega_{0l}=\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{c_{(l-1)}+c_l}{m_{(l-1)}}+\frac{c_l}{m_l}\right]-\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{c_{(l-1)}+c_l}{m_{(l-1)}}+\frac{c_l}{m_l}\right]^2-\frac{c_{(l-1)}c_l}{m_{(l-1)}m_l}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Определение коэффициентов $b_l, l=\overline{1,n}$ будем осуществлять последовательно, начиная с b_1. Заметим, что в данном исследовании учитывается принцип суперпозиции, а это значит, что в каждом уравнении системы (1) амплитуда вынуждающей силы равна сумме амплитуд слагаемых (при условии, что все $KC_l, l=\overline{1,n}$ колеблются в дорезонансной области, то есть $\omega<\omega_{0l}, l=\overline{1,n}$ и тогда $\varphi_{(l-1)}\approx\varphi_l$).

Из первого уравнения системы (1) получаем

$$x_{1a}=\frac{F_a+b_1\omega x_{2a}+c_1x_{2a}}{m_1\sqrt{\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b_1}{m_1}\omega\right)^2}},$$

откуда выводится уравнение

$$\alpha_1b_1^2-\beta_1b_1+\gamma_1=0, \qquad (5)$$

где $\alpha_1=\omega^2\left(x_{1a}^2-x_{2a}^2\right)$; $\beta_1=2\omega x_{2a}\left(F_a+c_1x_{2a}\right)$; $\gamma_1=x_{1a}^2m_1^2\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)^2-2F_ac_1x_{2a}-F_a^2-\left(c_1x_{2a}\right)^2$.

Решение квадратного уравнения (3) известно, то есть

$$b_{1_{(1,2)}}=\frac{\beta_1\pm\sqrt{\beta_1^2-4\alpha_1\gamma_1}}{2\alpha_1}. \qquad (6)$$

Так как коэффициент диссипации является действительным числом, то в (6)

$$\beta_1^2-4\alpha_1\gamma_1\geq 0.$$

Известно [1], что для того, чтобы система была колебательной, необходимо, чтобы показатель диссипации системы $\xi=\frac{b}{2m\omega_0}<1$ и тогда коэффициент диссипации должен быть

$$b_{1_{(1,2)}}<2m_1\omega_{01}. \qquad (7)$$

Из (6) определяются $b_{1_{(1)}}$ и $b_{1_{(2)}}$ и выбирается то значение, которое соответствует выражению (7).

Зная b_1, переходим к определению коэффициента b_2. Для этого рассматривается второе уравнение системы (1) и записывается

$$x_{2a}=\frac{\omega b_1x_{1a}+\omega b_2x_{3a}+c_1x_{1a}+c_2x_{3a}}{m_2\sqrt{\left(\omega_{02}^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b_2^{'}}{m_2}\omega\right)^2}},$$

где $b_2^{'}=b_1+b_2$ и откуда также выводится уравнение

$$\alpha_2\left(b_2^{'}\right)^2-\beta_2b_2^{'}+\gamma^2=0, \qquad (8)$$

где $\alpha_2=\omega^2\left(x_{2a}^2-x_{3a}^2\right)$; $\beta_2=2\omega x_{3a}\left(\omega b_1x_{1a}+c_1x_{1a}+c_2x_{3a}\right)$;

$\gamma_2=\left[x_{2a}m_2\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)\right]^2-x_{1a}^2\left(\omega b_1+c_1\right)^2-2x_{1a}x_{3a}c_2\left(\omega b_1+c_1\right)-\left(c_2x_{3a}\right)^2$.

Решение уравнения (8) имеет вид

$$b_{2_{(1,2)}}^{'}=\frac{\beta_2\pm\sqrt{\beta_2^2-4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}.$$

Как и в случае с выражением (6)

$$\beta_2^2-4\alpha_2\gamma_2\geq 0.$$

$$b_{2_{(1,2)}}^{'}<2m_2\omega_{02}.$$

В дальнейшем решения до n-й KC подобны нахождению коэффициентов $b_2^{'}$. В этом случае надо иметь в виду следующие соотношения

$$b_{l_{(1,2)}}^{'}=\frac{\beta_l\pm\sqrt{\beta_l^2-4\alpha_l\gamma_l}}{2\alpha_l};$$

$$\beta_l^2-4\alpha_l\gamma_l\geq 0; l=\overline{2,(n-1)};$$

$$b_{l_{(1,2)}}^{'}<2m_l\omega_{0l}, \quad b_{l_1}^{'}=b_{(l-1)}+b_l, \qquad (9)$$

где $\alpha_l=\omega^2\left[x_{la}^2-x_{(l+1)a}^2\right]$; $\beta_l=2\omega x_{(l+1)a}\left[\omega b_{(l-1)}x_{(l-1)a}+c_{(l-1)}x_{(l-1)a}+c_lx_{(l+1)a}\right]$;

$$\gamma_l = \left[x_{la} m_l \left(\omega_{0l}^2 - \omega^2\right)\right]^2 - x_{(l-1)}^2 \left\{\left[\omega b_{(l-1)}\right]^2 + c_{(l-1)} + 2\omega b_{(l-1)} c_{(l-1)}\right\} -$$
$$- 2x_{(l-1)a} x_{(l+1)a} c_l \left[\omega b_{(l-1)} + c_{(l-1)}\right] - \left[c_l x_{(l+1)}\right]^2 .$$

Последний n-й коэффициент диссипации определяется из последнего уравнения системы (1). Амплитуда перемещения x_n определяется выражением

$$x_{na} = \frac{b_{(n-1)}\omega x_{(n-1)a} + c_{(n-1)} x_{(n-1)a}}{m_n \sqrt{\left(\omega_{0n}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{b_n'}{m_n}\omega\right)^2}} , \qquad (10)$$

где $b_n' = b_{(n-1)} + b_n$.

Из выражения (10) получаем значение коэффициента b_n' в виде

$$b_n' = \left(\frac{1}{x_{na}\omega}\right)\left\{x_{(n-1)a}^2\left[b_{(n-1)}\omega + c_{(n-1)}\right]^2 - \left[x_{na} m_n \left(\omega_{0n}^2 - \omega_0^2\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Таким образом, предложен метод, на основании которого можно определить коэффициенты диссипации KC_n. Но при этом следует иметь в виду, что данный метод требует измерения амплитуд координат $x_l, l = \overline{1,n}$, знания величин c_l, m_l, ω_{0l} и ω.

Эти величины реально ощутимы в отличие от диссипативных характеристик KC_n. И их определения не являются затруднительными. Таким образом, предложенный метод имеет право на существование, поскольку он дает возможность получить информацию о силах сопротивления в колебательных системах.

Список литературы: **1.** *Бабаков И.М.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560с. **2.** *Божко А.Е., Голуб Н.М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188с.

Поступила в редколлегию 05.06.09

УДК 621.833.6

С.Н. КАВЕЦКИЙ, аспирант каф ТММ и САПР НТУ "ХПИ"

СИНТЕЗ ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНИЗМА $2A - \overline{AI}$ С УЧЕТОМ УГЛОВ ЗАЦЕПЛЕНИЯ С РАДИАЛЬНЫМ ДАЛЬНИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ САТЕЛИТОВ

У статті показана можливість синтезу планетарних механізмів з двозв'язаними колесами, на прикладі планетарного механізму $2A - \overline{AI}$. Одержані генеральні рівняння, для визначення чисел зубців зубчастих колес планетарного механізму $2A - \overline{AI}$. Визначені умови для вибору параметрів синтезу, та нерівності які визначають границі допустимих передаточних відношень.

In the article possibility of synthesis of planetary mechanisms is rotined with double-chained wheels, on the example of planetary mechanism $2A - \overline{AI}$. General equalizations are got, for determination of numbers of indents of toothed koles of planetary mechanism $2A - \overline{AI}$. Terms are certain for the choice of parameters of synthesis, and inequalities which determine granici of possible transmission relations.

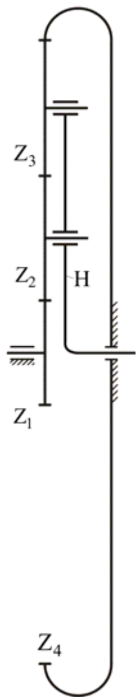

Рисунок 1

Введение. Вопрос синтеза планетарных механизмов с разными углами зацепления пар зубчатых колес, входящих в его состав, достаточно интересен, так как такие механизмы могут реализовать большие передаточные отношения при прочих равных условиях. При этом следует заметить, что синтез механизмов со степенью связности больше единицы значительно сложнее, так как возникают дополнительные параметры синтеза. Неоднозначность выбора параметров синтеза, приводит к необходимости определения дополнительных неравенств, описывающих пределы их изменения.

Основная часть. Как известно, для работоспособности планетарного механизма необходимо выполнение следующих условий: соосности, сборки, передаточного отношения и соседства. Запишем условия передаточного отношения и сборки для схемы $2A - \overline{AI}$ (рисунок 1) [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{Z_4 - Z_1}{k} = N, & \text{условие сборки;} \\ i_{1H}^4 = 1 - \dfrac{Z_4}{Z_1}, & \text{условие передаточного отношения.} \end{cases} \qquad (1)$$

С учетом углов зацепления в первой и второй ступенях, условие соосности в общем виде, для дальнего радиального расположения сателлитов будет иметь вид:

$$a_{12} + a_{23} = a_{43} .$$